LA MEDIA GEOMÉTRICA, COMO PRINCIPIO DE CÁLCULO DE PRIMAS

Cristina Lozano-Colomer
Departamento de Métodos Cuantitativos Universidad Pontificia de Comillas (ICADE). clozano@cee.upcomillas.es

José L. Vilar-Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial. Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Este artículo estudia el problema del cálculo de primas para distribuciones de siniestralidad con cola gruesa como Pareto con parámetro de forma $\alpha \leq 1$, en las que la esperanza matemática no existe.

Se plantea la media geométrica como un principio de prima basado en el enfoque de las funciones de pérdida. Esto se aplica a un seguro de lucro cesante.

Palabras Clave
Principios de cálculo de primas, colas gruesas, media geométrica, distribución de Pareto, seguro de lucro cesante

Abstract
This paper discusses the problem of premium calculation of a heavy-tailed claim size distribution, like Pareto distribution with a shape parameter $\alpha \leq 1$, therefore expectation does not exist.

The geometric mean is set up in order to obtain a premium principle based on the loss function approach. This is applied to business interruption insurance

Keywords

Premium calculation principles, heavy tail, geometric mean, Pareto distribution, business interruption insurance.

1-Introducción

Si se supone que la pérdida total correspondiente a una póliza de seguros está dada por una variable aleatoria no negativa X con función de distribución $F(x) = P(X \leq x)$ el principio del cálculo de primas más utilizado en la literatura de seguros es el principio de la prima neta, en el cual la prima de riesgo Π es igual al siguiente valor esperado, si existe:

$$\Pi = E(X) = \int_{0}^{+\infty} x\, dF(x) \tag{1.1}$$

Cuando se considera un contrato de reaseguro XL con una prioridad u, en este caso la prima neta de riesgo está dada por

$$\Pi(u) = \int_{u}^{+\infty} x\, dF(x) \tag{1.2}$$

En las aplicaciones a reaseguro a menudo nos encontramos con sucesos extremos, de baja frecuencia pero con una cuantía elevada.

En este caso de grandes siniestros la metodología de Valores Extremos permite modelizar la cola de la distribución, mediante una teoría asintótica que proporciona un modelo paramétrico, para los excesos sobre un umbral suficientemente alto.

El Teorema de Balkema- De Haan – Pickands (Coles. (2001)), establece que para un umbral suficientemente grande, la distribución de probabilidad de los excesos sobre este umbral puede ser aproximada por la Distribución Generalizada de Pareto, con función de distribución:

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{\xi x}{\sigma^*}\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \ \text{ con } \quad 1 + \dfrac{\xi x}{\sigma^*} > 0,\ \sigma^* > 0 \\ 1 - e^{-x/\sigma^*} & \xi = 0 \ \text{ con } \quad x \in R\ , \sigma^* > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Los tres submodelos de la familia Generalizada de Pareto son, para $\xi < 0$ la distribución Beta, $\xi = 0$ la distribución Exponencial y $\xi > 0$ la distribución de Pareto.

El caso que nos ocupa corresponde a distribuciones con cola gruesa, que son el caso $\xi > 0$ correspondiente a la distribución de Pareto

2. Distribución de Pareto

2.1 Función de distribución

Tomando la reparametrización $\xi = \frac{1}{\alpha} > 0$, y considerando el umbral u como parámetro de escala (Reiss y Thomas (2001)), la función de distribución y la función de densidad tienen la forma:

$$F_u(y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{u}\right)^{-\alpha} \quad \text{con } y > 0, \quad \alpha > 0 \tag{2.1}$$

$$f_u(y) = \frac{\alpha}{u}\left(\frac{u}{u+y}\right)^{\alpha+1} \quad \text{con } y > 0, \quad \alpha > 0$$

La distribución de la variable $X^u = X \mid X > u$, cuantía por encima del umbral u, se puede obtener de la relación

$$X^u = Y + u \quad , \quad Y > 0 \quad ,$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(X^u \leq x) &= P(Y + u \leq x) \\ &= P(Y \leq x - u) \\ &= F_u(x - u) \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x-u}{u}\right)^{-\alpha} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha}, \quad x > u \quad , \quad \alpha, u > 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Su función de densidad es

$$f^{u}(x) = \frac{\alpha\ u^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq u > 0 \tag{2.3}$$

Se puede tomar la variable exceso normalizado $Z = \frac{X}{u}$ con $Z > 1$, obteniéndose así una función de distribución que depende de un solo parámetro α

$$\begin{aligned} G(z) &= P\left(Z \leq z\right) \\ &= P\left(\frac{X}{u} \leq z\right) \\ &= P\left(X \leq u\,z\right) \\ &= F^{u}(u\,z) \\ &= 1 - \left(\frac{u}{u\,z}\right)^{-\alpha} = 1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{-\alpha}, \quad z > 1 \quad , \quad \alpha > 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Medidas de Posición

Vamos a analizar los momentos y otras medidas de tendencia central a partir de las expresiones (2.3) y (2.4)

La función cuantil tiene la forma

$$F^{-1}(q) = u\,(1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad 0 < q < 1 \tag{2.5}$$

La función de densidad de Pareto tiene una cola derecha polinomial inversa, que es mas gruesa cuanto menor es el valor de α, lo que implica que solo existen momentos de orden bajo, en particular el k-ésimo momento de la distribución de Pareto existe solo si $k<\alpha$.

La esperanza matemática y la varianza tienen la forma:

$$E(X) = \frac{\alpha u}{\alpha - 1} \quad , \ \alpha > 1 \tag{2.6}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha u^2}{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2 \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) se deduce que para distribuciones con cola extremadamente gruesa ($\alpha \leq 1$) no es posible utilizar la esperanza matemática como medida de localización. Se tratará entonces de utilizar otra medida de tendencia central, otro promedio si es que existen, o una medida de posición como la mediana.

Partiendo de las definiciones de media geométrica, de media armónica y de su relación con la media aritmética de la Estadística Descriptiva para una distribución de frecuencias, vamos a derivar las definiciones de media geométrica y armónica para una distribución de probabilidad de una variable aleatoria, comprobando su existencia en el caso de distribuciones con cola extremadamente gruesa. Dada una distribución de frecuencias,

$$(x_i, n_i, i = 1....r) \ \text{ con } \ \sum_{i=1}^{r} n_i = N \qquad x_i > 0 \ \ \forall i$$

donde las x_i representan los diferentes valores de la variable, con $i = 1...r$, n_i las frecuencias absolutas de dichos valores y N el número total de datos. Entonces se define así la media geométrica:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots\ldots x_r^{n_r}} = \left(\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}\right)^{1/N} \tag{2.8}$$

Tomando logaritmos se obtiene la siguiente relación:

$$\text{Ln}\, G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i \text{Ln}\, x_i \Leftrightarrow G = \exp\left(\overline{\text{Ln}(x)} \right) \tag{2.9}$$

Donde la barra representa la media aritmética. Por similitud introducimos la media geométrica para una distribución de probabilidad de la siguiente forma:

$$G = \exp\left(E(\operatorname{Ln} X)\right) \tag{2.10}$$

En el caso de la distribución de Pareto se obtiene fácilmente, integrando por partes:

$$E\left[\operatorname{Ln}X\right] = \int_u^{+\infty} \operatorname{Ln} x \, \frac{\alpha u^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx = \operatorname{Ln} u + \frac{1}{\alpha}$$

$$G = e^{\left[\operatorname{Ln}X\right]} = e^{\operatorname{Ln} u + \frac{1}{\alpha}} = u \; e^{\frac{1}{\alpha}} \quad u > 0, \; \alpha > 0 \tag{2.11}$$

Como se puede ver en la expresión (2.11) la media geométrica existe cualquiera que sea el valor de α, y por tanto es posible calcular este promedio incluso para distribuciones de cola muy gruesa.
Dada una distribución de frecuencias

$$(x_i, n_i, i = 1....r) \;\; \text{con} \; \sum_{i=1}^{r} n_i = N \quad x_i > 0 \;\; \forall i$$

la media armónica queda definida así

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\overline{x^{-1}}} \tag{2.12}$$

Similarmente la media armónica para una distribución de probabilidad se define de la siguiente forma:

$$H = \left\{E\left(X^{-1}\right)\right\}^{-1} \tag{2.13}$$

Para la distribución de Pareto la media armónica es

$$H = u(1 + \frac{1}{\alpha}) \quad u > 0, \; \alpha > 0 \tag{2.14}$$

De la función cuantil (2.5) se obtiene que:

1. La media geométrica es $1-\frac{1}{e}=0,632$ - ésimo cuantil cualquiera que sea el valor de α. Por tanto, cuanto más gruesa sea la cola de la distribución, es decir cuanto menor sea α, mayor será el valor de este cuantil, según se aprecia en la siguiente figura:

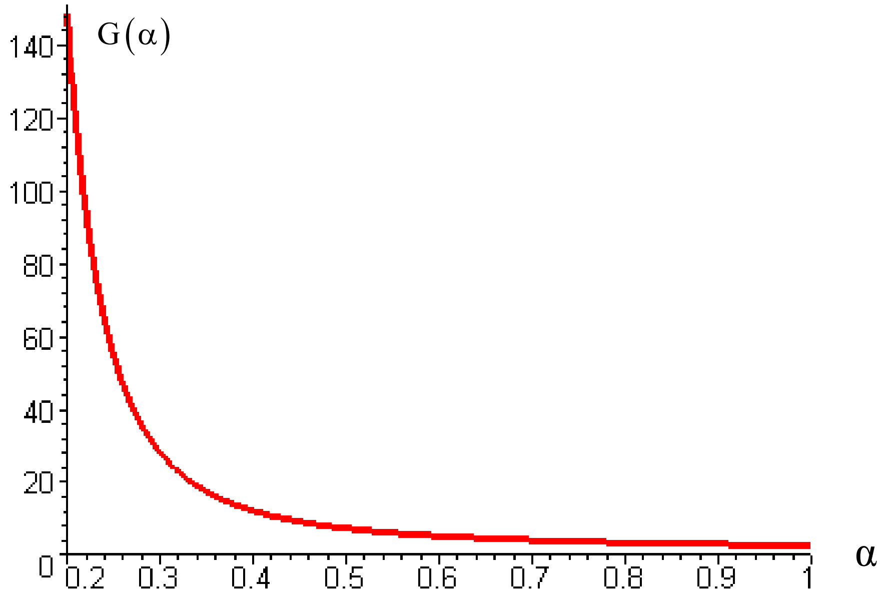

Figura 1: G(α), media geométrica de una distribución de Pareto, en función del parámetro de forma α.

2. La media armónica es el $1-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{-\alpha}$ -ésimo cuantil.

3. La mediana es $M_e = F^{-1}(0,5) = u\ 2^{\frac{1}{\alpha}}$

4. Se comprueba fácilmente (Martín Pliego, J. (2004)) que:

$$H \leq G \leq E(X) \tag{2.15}$$

5. De 1 y 2 se deduce que $G > M_e$

Por tanto, el promedio más grande en el caso que la esperanza matemática sea infinita es la media geométrica de la distribución.

2.3 Estimación máximo verosímil

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n, el estimador máximo verosímil para el parámetro de forma de la distribución de Pareto, con el umbral u conocido, es igual:

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{u}} \tag{2.16}$$

A partir de esta estimación se pueden obtener la media geométrica estimada de la distribución de Pareto sustituyendo esta estimación en (2.11)

$$\hat{G} = u\; e^{\frac{1}{\hat{\alpha}}} = u\, e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{u}}{n}} = u\, e^{\log(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{u})^{\frac{1}{n}}} = u \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{u}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \tag{2.17}$$

Como se ve el estimador de la media geométrica poblacional coincide con la media geométrica muestral.

Conviene destacar que no depende del umbral u, sino únicamente de los valores muestrales elegidos.

Para obtener la estimación de la media armónica procedemos de la misma forma, sustituyendo la estimación de α en (2.11)

$$\hat{H} = u\,(1 + \frac{1}{\hat{\alpha}}) = u \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{u}}{n} \right) \tag{2.18}$$

3. Principios de cálculo de primas

3.1 Métodos para la obtención de las primas

En la matemática actuarial el procedimiento del cálculo de primas se modeliza de la siguiente forma. La cuantía aleatoria de la siniestralidad (de un contrato en un periodo, por ejemplo) se especifica por medio de una variable aleatoria X, a la que denominaremos el riesgo.

Definición: Un principio de cálculo de primas es un funcional H que asigna a un riesgo X un número real H [X], que será la prima a cobrar a cambio de asumir el riesgo X.

Dado que el riesgo X es una variable aleatoria, el principio del cálculo de la prima dependerá de la distribución de probabilidad de dicha variable.
En Gómez Déniz E., Sarabia Alegría J.M. (2008) se describen diferentes principios de cálculo de primas, siendo los más utilizados:

1. *Principio de la Prima Neta* : $H(X) = E[X]$

2. *Principio de la Prima del Valor Esperado* $H(X) = E[X](1+\theta)$, para algún $\theta>0$

3. *Principio de la Prima de la Varianza* $H(X) = E[X]+\alpha Var[X])$, para algún $\alpha>0$

4. *Principio de la Prima de la Desviación Típica* $H(X) = E[X]+ \beta\sqrt{Var[X]}$ para algún $\beta>0$

5. *Principio de la Prima Exponencial* $H[X] = \frac{1}{\alpha}\ln E[e^{\alpha X}]$ para algún $\alpha>0$

6. *Principio de la Prima Esscher* $H[X]=\frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$ $h > 0$.

7. *Principio de la Prima Wang*

$$H[X]=\int_0^\infty g\left[S_X(t)\right]dt \quad g:[0,1]\rightarrow[0,1] \text{ creciente y concava} \quad \text{con } S_X(t)=\Pr(X>t)$$

La función g se denomina función de distorsión

8. *Principio de utilidad equivalente.* La prima H[X] deberá de satisfacer
   $u(\omega)=E[u(\omega-X-H)]$

   Donde u (.) es la función de utilidad del asegurador o del asegurado (dependiendo del punto vista del cual se quiera calcular el valor de la prima), que es creciente y cóncava , y donde ω representa la riqueza inicial.

Es claro que todos estos principios de cálculo de primas solo se pueden aplicar si la distribución de probabilidad de la variable riesgo X verifica que $E[X]<\infty$, y en los casos 2 y 3 $E[X^2]<\infty$.

En el caso exponencial se verifica

$$E\left[X\right]=+\infty\Rightarrow\forall\alpha>0 \;\; E[e^{\alpha X}]=+\infty$$
$$E\left[X\right]=+\infty\Rightarrow\forall\alpha>0 \;\; E[Xe^{\alpha X}]=+\infty$$

Por tanto, la no existencia de momentos finitos, como ocurre con las distribuciones de cola muy gruesa como la de Pareto con parámetro de forma $\alpha<1$, impide aplicar los principios anteriores del cálculo de primas.
Esto hace necesario buscar otro método de cálculo que proporcione un resultado finito para la prima.

3.1 Prima de riesgo y funciones de pérdida

Bajo el enfoque del cálculo de primas basado en funciones de pérdida se obtienen varios de los principios de cálculo de primas conocidos y otros nuevos.

Este enfoque está basado en la metodología de la decisión bayesiana cuyo procedimiento consiste en definir una función de pérdida

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(X, P) \to L(X, P)$$

Tal que a cada par (X, P) le hace corresponder la pérdida $L(X, P)$ en la que incurre un decisor, que toma la acción P y se encara con el resultado X de algún experimento aleatorio. Lógicamente está función de pérdida es una variable aleatoria y se determina la prima de forma que se minimice la pérdida esperada:

$$\underset{P}{\mathrm{Min}} \int_0^{\infty} L(X, P)\, dF_X(x) = \underset{P}{\mathrm{Min}}\, E[L(X, P)] \qquad (3.1)$$

En muchos casos este punto mínimo puede determinarse derivando (3.1), resolviendo la ecuación

$$E\left(\frac{\partial}{\partial P} L(X, P)\right) = 0 \qquad (3.2)$$

En el contexto presente, X es el riesgo y P la prima cobrada por asumir dicho riesgo.

Heilmann, W. (1989) considera varias funciones de pérdida obteniendo como resultados principios para el cálculo de primas obtenidas por otros métodos como son:

- <u>Pérdida cuadrática</u>. Si se considera la función de pérdida cuadrática dada por

  $$L(X, P) = (X - P)^2$$

  Resulta: P=E [X] el principio de prima neta o equivalencia.

- <u>Pérdida Exponencial</u> Si se considera la función de pérdida exponencial dada por

  $$L(x, P) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha P})^2 \text{ con } \alpha > 0$$

Resulta que $P = \frac{1}{\alpha} \mathrm{Log} E[e^{\alpha X}]$ coincide con el principio de utilidad exponencial.

- <u>Pérdida cuadrática ponderada.</u> Si se considera la función de pérdida cuadrática ponderada por $e^{\alpha x}$ con $\alpha>0$ dada por

$$L(x\text{-}P)= e^{\alpha x}(x\text{-}P)^2$$

Resulta que $P = \frac{E\left(Xe^{\alpha X}\right)}{E\left(e^{\alpha X}\right)}$ coincide con el principio de Esscher

Este mismo autor hace notar que las funciones de pérdida que se han utilizado en los casos anteriores son del tipo

$$L(x,P) = g(x)(h(x)-h(P))^2 \tag{3.3}$$

Obteniendo que en este caso se verifica el siguiente resultado para el valor de la prima.

Teorema.

Si h(x) es estrictamente creciente y diferenciable (por tanto existe su inversa) y si g(x) es no negativa, se sigue que para riesgos X con E [g(X)] $<\infty$ y E [g(X) h(X)] $<\infty$, se verifica:

$$P = h^{-1}\left(\frac{E[g(x)h(x)]}{E[g(x)]}\right) \tag{3.4}$$

En el articulo de Heilmann, W. (1989) se proponen otras dos funciones de pérdida, la primera propuesta por Clevenson y Zidek (1975) tiene la forma

$$L(X,P) = \frac{(X-P)^2}{X} \text{ con } X>0 \text{ y la } \Pr(X>0)=1$$

Aplicando las expresiones (3.3) y (3.4)

$$g(x)=\frac{1}{x} \qquad\qquad h(x)=x \qquad x>0$$

se tiene que $h^{-1}(x)=x$ por tanto

$$P[X]=h^{-1}\left[\frac{E[\frac{1}{X}(X)]}{E[\frac{1}{X}]}\right]=h^{-1}\left[\frac{1}{E[X^{-1}]}\right]=\left[\frac{1}{E[X^{-1}]}\right]=E[X^{-1}]^{-1} \qquad (3.6)$$

La prima coincide pues con la media armónica.

La segunda función de pérdida fue sugerida por Gary Venter (en una comunicación privada tal y como se indica en el artículo de Heilmann, W. (1989)), y tiene la forma:

$$L(X,P)=(\ln X-\ln P)^2 \quad \text{con} \quad X>0 \quad , \quad P>0 \quad \text{y} \quad \Pr(X>0)=1$$

En este caso es evidente que la función de pérdida tiene la forma dada en (3.3) con

$$g(x)=1 \quad , \quad h(x)=\ln x$$

Y como h(x) es estrictamente creciente y diferenciable y g(x) positiva, por tanto se puede aplicar el teorema..

Dado que $h^{-1}(x)=\exp(x)$, sustituyendo en la expresión (3.4), se obtiene la prima fácilmente:

$$P=h^{-1}\left(\frac{E[LnX]}{E[1]}\right)=\exp(E[LnX]) \qquad (3.7)$$

Que coincide con la expresión de la media geométrica G dada en (2.10).

Por tanto con una función de pérdida logarítmica, se ha comprobado que se obtiene el principio de prima media geométrica.

Esto tiene gran importancia ya que se ha encontrado que la prima media geométrica es un principio de cálculo de prima que siempre es posible aplicar, aún en los casos en que el resto de los principios de cálculo de primas dan como resultado una prima infinita. Este es el caso de los riesgos con distribuciones de probabilidad con cola gruesa como la de Pareto con $\alpha \leq 1$. Además al poder ser deducida directamente de una función de pérdida, la media geométrica resulta tener un fundamento desde el punto de vista Bayesiano.

4. Aplicación al seguro de lucro cesante (Business Interruption)

En este epígrafe se va a aplicar la media geométrica como principio de cálculo de prima al caso de un seguro de lucro cesante, donde generalmente la distribución de probabilidad del daño asegurado carece de momentos, aprovechando los resultados obtenidos por Zajdenweber, D. (1996).

Un seguro de lucro cesante Castelo, J. Guardiola A. (2008) (Diccionario Mapfre de Seguros) *es aquel que garantiza al asegurado la pérdida de rendimiento económico que hubiera podido alcanzarse en un acto o actividad, caso de no haberse producido el siniestro descrito en la póliza. Se denomina también seguro de interrupción de negocios o seguro de pérdida de beneficios.*

La indemnización a satisfacer según la ley, salvo pacto en contrario, será:

- La pérdida de beneficios que produzca el siniestro durante el plazo previsto en la póliza.
- Los gastos generales que continúen gravando al asegurado después de la producción del siniestro.
- Los gastos que sean consecuencia directa del siniestro.

Zajdenweber, D. (1996), plantea la hipótesis de que en este tipo de seguro la distribución de probabilidad de la cuantía es Pareto con parámetro de forma α=1. Y analiza en su artículo la distribución de la cuantía de la siniestralidad anual, en este ramo de lucro cesante, para el mercado francés durante los años 1975 a 1992, encontrando que es Pareto, a partir de un umbral común para todos los años de 330.000$, con un rango de valores anuales estimados del parámetro de forma α, entre 0,8854 y 1,2510, centrado alrededor de un valor medio 1,033, por tanto muy cerca del valor hipotético de 1.

Las estimaciones realizadas indican que la varianza teórica no existe , ya que el valor de α es menor que 2 , y el mismo dato indica que incluso la esperanza no existe ya que en 6 años de los 16 estudiados el valor de α es menor que 1, y solo durante 4 años es mayor que 1.1.

El autor apunta que la elección de un modelo estadístico correcto es fundamental a la hora de tarificar, pero los datos no son demasiado numerosos y no dan un criterio seguro para la elección de un valor preciso de α .

El autor toma el α = 1, y lo justifica con el hecho de que el promedio es cercano a 1 y con la idea de que el procedimiento matemático es el mismo para todo $\alpha \leq 1$.

Esto supone, que la esperanza es infinita, y por tanto no es posible encontrar el valor de la prima. Así que el autor evita este problema acotando el soporte de la variable aleatoria mediante un valor máximo para la cuantía de 330 millones de dólares, que considera razonable, ya que es aproximadamente dos veces la cuantía del máximo siniestro obtenido en la muestra.

En este caso se obtiene una media y una varianza finita que para el caso α = 1 se escriben de la siguiente forma:

$$E[X] = Mm(\ln M - \ln m)(M - m)^{-1} \qquad m \leq x \leq M \qquad (4.1)$$

$$V[X] = Mm[1 - Mm(LnM - \ln m)^2 (M - m)^2] \qquad m \leq x \leq M \qquad (4.2)$$

A continuación vamos a comparar las primas obtenidas si se utiliza el principio de prima media geométrica con las primas obtenidas si se utiliza el método de Zajdenweber.

Para ello se han simulado 100 muestras de tamaño 100, procedentes de una distribución de Pareto, de la forma siguiente:

1. Se simulan 100 números aleatorios α uniforme dentro del intervalo (0,8854, 1,2510) que es el rango estimado por Zajdenweber.

2. Para cada valor de α simulado y con el valor del umbral $u = 330.000\$$, se simulan 100 valores de una distribución de Pareto

Para cada muestra obtenida se han calculado dos primas, una la media geométrica de los datos y otra con la expresión (4,1), tomando como m = 330.000 y como M el doble del máximo valor muestral, siguiendo las indicaciones de Zajdenweber.

Los resultados del análisis estadístico de las 100 primas medias geométricas obtenidas se resumen en la siguiente tabla.

Media Aritmética	776.688
Mediana	777.967
Desviación estándar	84.275
Curtosis	0,51
Coeficiente de asimetría	0,39
Recorrido	443.490
Mínimo	574.603
Máximo	1.018.093
Coeficiente de variación	0,109

Tabla 1. Análisis estadístico descriptivo de las primas medias geométricas de las 100 muestras simuladas

Media Aritmética	1.668.003
Mediana	1.677.601
Desviación estándar	304.634,88
Varianza de la muestra	92.802.407.246
Coeficiente de variación	0,183
Curtosis	0,08
Coeficiente de asimetría	0,33
Recorrido	1.617.930
Mínimo	880.186
Máximo	2.498.117

Tabla 2. Análisis descriptivo de las primas según la expresión (4.1), de las 100 muestras simuladas con soporte acotado por dos veces el máximo valor muestral

Los resultados de las tablas 1 y 2 nos indican:

1. Los valores de las primas media geométrica son muy inferiores a de las obtenidas con, el método de Zajdenweber, prácticamente la mitad.

2. La distribución de las primas utilizando el método de Zajdenweber tiene mayor dispersión relativa que si se utiliza la media geométrica, como indica el hecho de que el coeficiente de variación es mayor.
3. El recorrido en el caso de las primas Zajdenweber es casi cuatro veces el recorrido para las primas media geométrica.
4. Ambas distribuciones tienen una ligera asimetría a la derecha, ya que los coeficientes de asimetría son positivos y pequeños

Con el fin de comparar de manera gráfica las dos tipos de primas obtenidas para las 100 muestras, estas se han ordenado de forma creciente, tomando como criterio de ordenación el máximo valor muestral, de forma que la muestra 1 es la que lo tiene más pequeño y la muestra 100 la que lo tiene mayor.

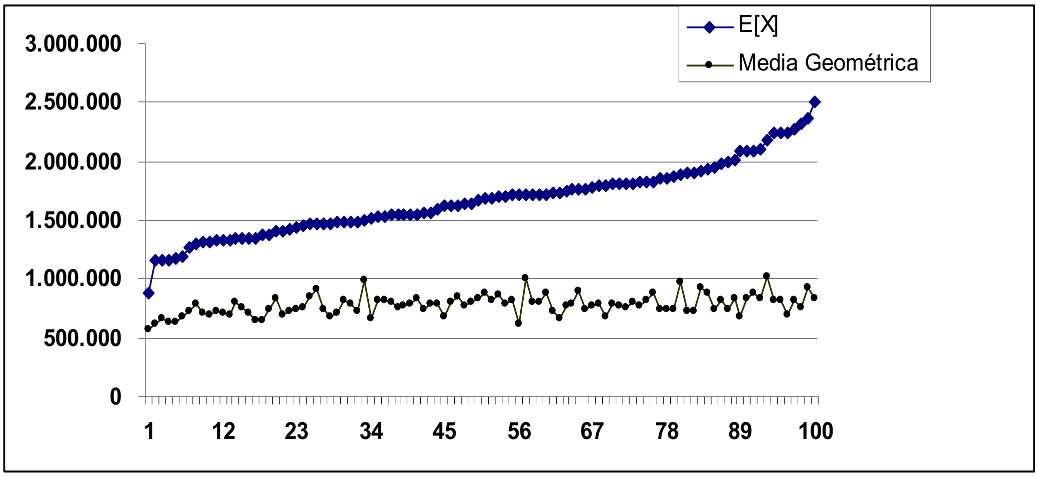

Figura 2. Valores de las primas para las 100 muestras obtenidas con los dos métodos

Mirando a la figura 2 podríamos concluir que:

1. La distribución de las primas media geométrica es poco sensible a los valores máximos muestrales, aunque los máximos muestrales crezcan los valores de la media geométrica se mantienen dentro del mismo rango.
2. Los valores de las primas obtenidas con soporte acotado crecen cuando el máximo valor muestral crece, tal y como es de esperar.

La explicación de estos resultados está en el hecho de que la prima media geométrica es función de todos los datos muestrales mientras que el método de acotar el soporte de la distribución depende únicamente del umbral y del extremo superior del soporte de la distribución M, como se puede ver en (4.1).

Además como se ha comprobado en el apartado 2.2 la media geométrica constituye el cuantil constante 0,632 lo cual contribuye a su estabilidad.

Este valor de M es desconocido y es necesario realizar alguna hipótesis respecto de este valor, hipótesis que puede estar basada en la experiencia histórica o en el juicio subjetivo.

En el caso de Zajdenweber, este autor opta por vincular M a los valores muestrales tomando el valor del doble del máximo valor muestral, lo que parece bastante arbitrario.

Resumen y conclusiones

Nos hemos planteado el problema del cálculo de la prima para distribuciones de cola muy gruesa, en concreto para la distribución de Pareto con un parámetro de forma $\alpha \leq 1$, lo que supone una esperanza de la variable infinita.

Por lo tanto, por esta razón y dado que todos los principios de cálculo de prima generalmente utilizados dependen, de alguna manera, de la esperanza de la distribución de probabilidad del riesgo que se quiere asegurar, resulta que, en el caso que nos ocupa estos principios no son aplicables.

En la bibliografía consultada, en la que se ha planteado este problema, la forma de resolverlo ha sido acotando el soporte de la distribución de la variable con el fin de obtener una esperanza finita que permitiera tarificar pero, a nuestro entender, esta forma de proceder es arbitraria ya que supone realizar una hipótesis sobre el valor de la pérdida máxima posible.

Por este motivo hemos valorado la posibilidad de aplicar otro principio de cálculo de prima, que no dependiera de la esperanza de la variable, al que no le afectara el hecho de que $\alpha \leq 1$, y que no precisara de la utilización de hipótesis suplementarias.

Para ello analizamos otras medidas de tendencia central de la distribución de Pareto: la media geométrica, la media armónica y la mediana, encontrando que las tres son siempre calculables cualquiera que sea el valor del parámetro de forma y que de las tres, la media geométrica es la mayor y, además, constituye el 0,632-ésimo cuantil, propiedades por las que nos ha parecido que era la forma de calcular la prima mas adecuada.

Para justificar esta elección de la media geométrica como principio de cálculo de primas, hemos utilizado la metodología bayesiana basada en las funciones de pérdida, comprobando que la prima media geométrica es la que minimiza la pérdida esperada siempre que la función de pérdida sea la función logarítmica.

Tenemos presente que existe el inconveniente de que la media geométrica no es una medida de riesgo coherente ya que, por su forma logarítmica, no verifica las propiedades de subaditividad e invarianza frente a las traslaciones (Gómez Déniz E., Sarabia Alegría J.M. (2008)) pero, en la situación de distribuciones sin momentos, la mayoría de las medidas de riesgo que se utilizan generalmente, como dependen de dichos momentos, no son calculables.

Por tanto se plantea un principio de prima de media geométrica para distribuciones de cola muy gruesa basado en una función de pérdida logarítmica, que puede evitar la necesidad de acotar el soporte de la distribución y qué, presenta las siguientes ventajas:

- Siempre existe en las distribuciones de Pareto incluso cuando el resto de principios de cálculo de primas no proporcionen una prima finita.
- La media geométrica se obtiene de forma sencilla.
- No necesita acotar el soporte de la distribución y, por lo tanto, no es necesario realizar ninguna hipótesis respecto del siniestro máximo posible.
- Constituye el cuantil 0,632-ésimo de la distribución cualquiera que sea el valor del parámetro de forma.
- Se obtiene un valor más estable, sin depender excesivamente de las fluctuaciones muestrales.

Referencias:

CASTELO, J. GUARDIOLA A. (2008). 4ª Ed. Diccionario Mapfre de Seguros. *Ed. Mapfre* CLEVENSON, M.L. Y ZIDEK, J.V. (1975) Simultaneous estimation of de means of independents Poisson laws. *Journal of the American Statistical Association.*

COLES. (2001): An introduction to statistical modeling of extreme values. *Springer-Verlag. London.*

EMBRECHTS P., KLÜPPELBERG C., MIKOSCH T. (1997): Modeling extremal events for insurance and finance. *Springer.*

GOMEZ DÉNIZ E., SARABIA ALEGRIA J.M. (2008): Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. *Fundación MAPFRE*

HEILMANN, W. (1989). Decision theoretic foundations of credibility theory. *Insurance Mathematics and Economics.*

MARTIN PLIEGO, J. (*2004):* Introducción a la Estadística Económica y Empresarial.. *Editorial Thomson.*

REISS, R.D.; THOMAS, M. (2001): Statistical Analysis of Extreme Values*.* *Birkhauser Verlag. Basel.*

ZAJDENWEBER, D. (1996). Extreme values in bussines interruption insurance. *Journal of Risk and Insurance, 1, 95-110*